



TITLE:

# ヤング図形のエルゴード的な統計集団における集中現象 (表現論と非可換調和解析の展望)

AUTHOR(S):

洞, 彰人

---

CITATION:

洞, 彰人. ヤング図形のエルゴード的な統計集団における集中現象 (表現論と非可換調和解析の展望). 数理解析研究所講究録 2013, 1825: 75-90

ISSUE DATE:

2013-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194743>

RIGHT:

# ヤング図形のエルゴード的な統計集団 における集中現象 (Concentration phenomena in ergodic ensembles of Young diagrams)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 洞 彰人 (Akihito HORA) \*  
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 概要

対称群の表現に由来をもつ統計的な属性を備えた Young 図形の集団から標本を抜き出すとき, だいたいどんな図形が現れるかを考える. もっと問題をしばれば, 対称群の表現を分解したときに支配的な大きさをもつ因子が特定されるかという問である. 1970 年代に Logan-Shepp[9] と Vershik-Kerov[12] によりなされた Plancherel 集団における極限形状の導出が, 事の起こりと言える. 確率論では大数の法則としてとらえられるこのような集中現象の背後には, しばしば系のエルゴード性が関わっている. 有限のサイズの Young 図形の集団を見ている限りではこのエルゴード性は今ひとつはつきりしないが, Young グラフの経路空間上の測度に持ち上げると, 有限経路の置換のなす群に関するエルゴード性が認識できる. Young グラフの経路空間上のエルゴード的な確率測度の分類は無限対称群の指標の分類と等価であり, 1960 年代に Thoma[11] によって得られた無限次元の単体 (=Young グラフの Martin 境界) がその分類空間になる. 講演では, Plancherel 集団における極限形状の結果がどのように他のエルゴード的な集団に拡張されるかについて, 具体例に即して話をした. 実際の計算においては, Kerov が開発した推移測度の自由キウムラントに基づく手法が有用である. 本稿では, 時間の都合上講演でほとんど触れられなかった Kerov-Olshanski 代数における漸近的な解析の枠組とそのための測度の自由キウムラントや Kerov 多項式の説明も簡単に補う. なお, 本稿は, 具体例の計算の付加等はあるものの, 本質的には Vershik-Kerov[12], および Biane[1] の理論の解説記事 (あるいは整理ノート) のつもりである.

---

\* 2012 年 10 月 1 日より北海道大学大学院理学研究院

## 序

本稿に現れる Young 図形は, 対称群の既約表現の分類ラベルの役割を持つ. 慣習にしたがい, Young 図形を図 1 のように表示する. 最右図における太線の部分を Young 図形のプロフィールという. 本稿では, Young 図形の群論的な統計集団を扱う. そこでは, 対称群の表現の既約または因子分解により, 統計的な属性が付与される. 典型的な問題は, どのような因子が最も尤もらしいか, そしてその因子は支配的と言えるほど大きいのか, などなどである. 枠組としては次のような結果を示したい:

**定理 0.1 (!?)** Young 図形からなる巨大な  $\bigcirc\bigcirc$  集団では, ほとんどすべての Young 図形が  $\times\times$  のような特別な形に見える.



図 1 Young 図形  $(3 \geq 2 \geq 2 \geq 1) = (1^1 2^2 3^1)$  とそのプロフィール

このような問題を考えるにあたり, 次の対照的な 2 点が注意に値する.

- 群論的な統計集団においては, 多くの量が群の指標を通して計算可能である.
- 一方, 対称群の既約指標の値から対応する Young 図形の形状を読み取るのは, 一般に難しい.

Young 図形の形状と既約指標のサイクルでの値の橋渡しをするのが, Kerov の導入した推移測度である. 推移測度の自由キュムラントや Kerov 多項式を用いて上記の問題にアプローチするのが, 本稿の主題である. 対称群の表現の漸近理論一般について, [7] が優れた読み物である.

以下,  $\mathbb{C}$  上の線型表現を単に表現と呼ぶ.

# 1 極限形状

## 1.1 群の表現の既約分解から生じる確率空間

有限群  $G$  の表現  $\pi$  の既約分解

$$\pi \cong \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} m_\lambda \pi^\lambda \quad (1.1)$$

を考える. ここに,  $m_\lambda \pi^\lambda = \pi^\lambda \oplus \cdots \oplus \pi^\lambda$  は因子表現であり,  $\pi$  の  $\lambda$ -因子という. (1.1) の両辺の次元をとった

$$\dim \pi = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} m_\lambda \dim \pi^\lambda$$

から,  $\widehat{G}$  上の確率測度  $p$  を得る:

$$p(\lambda) = \frac{m_\lambda \dim \lambda}{\dim \pi} \quad (\text{ただし } \dim \lambda = \dim \pi^\lambda).$$

例 1.1  $n$  次対称群を  $\mathfrak{S}_n$  で, サイズ  $n$  の Young 図形全体を  $\mathbb{Y}_n$  で表す.  $\mathfrak{S}_n$  の左正則表現  $L_n$  の既約分解

$$L_n \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} [\dim \lambda] \pi^\lambda, \quad \dim L_n = n!$$

により,  $\mathbb{Y}_n \cong \widehat{\mathfrak{S}_n}$  上の Plancherel 測度

$$\mathfrak{P}^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n \quad (1.2)$$

を得る.

$\mathfrak{S}_n$  の既約表現  $\pi^\lambda$  の制限  $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi^\lambda$  や誘導  $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \pi^\lambda$  の既約分解を記述する図 2 のような Young グラフを考え, その経路空間を

$$\mathfrak{T} = \{t = (t(0) \nearrow t(1) \nearrow t(2) \nearrow \cdots \nearrow t(n) \nearrow \cdots) \mid t(n) \in \mathbb{Y}_n\}$$

で表す. ここに,  $t(0) = \emptyset$ ,  $t(1) = \square$  である.

$\mathbb{Y}_n$  上の  $\mathfrak{P}^{(n)}$  は, 経路空間  $\mathfrak{T}$  の筒集合に対して

$$\mathfrak{P}(\underbrace{\{\emptyset \nearrow \square \nearrow \cdots \nearrow \lambda\}}_{\text{固定された有限経路}} \underbrace{\nearrow \cdots \cdots}_{\text{任意の無限経路}}) = \frac{\dim \lambda}{n!}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n$$

とおくことにより,  $\mathfrak{T}$  上の確率測度  $\mathfrak{P}$  に持ち上げることができる. この  $\mathfrak{P}$  は  $\mathfrak{T}$  上の Plancherel 測度と呼ばれ,

$$\mathfrak{P}(\{t \in \mathfrak{T} \mid t(n) = \lambda\}) = \mathfrak{P}^{(n)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (1.3)$$

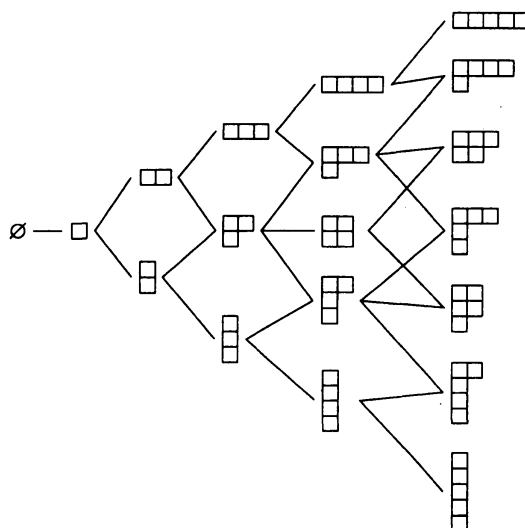


図2 Young グラフ

をみたす.  $\mathfrak{S}$  の元を有限のレベルで切った有限経路は, 対称群の列に付随する Gelfand–Tsetlin 基底の 1 本のベクトルをラベルづける. したがって,  $\mathfrak{S}$  上の測度は Gelfand–Tsetlin 基底に関する展開の (射影) 極限的, 連続的な類似を与える.

## 1.2 連続図形

Young 図形をエンコードするために使われる座標が幾つかある. 図 1 のように Young 図形をそのプロファイルと同一視したとき, 交互に現れる谷と山の座標

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < y_{r-1} < x_r, \quad x_j, y_j \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

に着目する (図 3). ただし, これらの座標を整数にするため, 図 3 では各箱の 1 辺の長さを  $\sqrt{2}$  とする. 他に, Frobenius 座標  $a_i = \lambda_i - i + 1/2$ ,  $b_i = \lambda'_i - i + 1/2$  もよく用いられる. Frobenius 座標と (1.4) の山谷座標の間には, それぞれの生成関数 (座標を零点や極にもつ有理関数) を通した具体的な変換則がある ([6] 等).

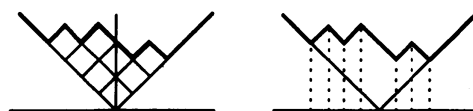
図3  $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ ,  $(-4 < -3 < -2 < -1 < 1 < 2 < 3)$ 

図 3 のプロファイルのような形状ではあるが (1.4) での整数条件を課さないものを矩形図

形といい, それら全体を  $\mathbb{D}_0$  と書く. これをさらに一般化して

$$\mathbb{D} = \{\omega : \mathbb{R} \text{ 上の 1-Lipschitz 関数} \mid \text{十分大きな } |x| \text{ に対して } \omega(x) = |x|\} \quad (1.5)$$

とおき,  $\mathbb{D}$  の元を連続図形と呼ぶ. Young 図形全体を  $\mathbb{Y}$  で表すと,  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ .

プロフィールと同一視された  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  のスケール変換

$$\lambda^{\sqrt{n}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(\sqrt{n}x) \quad (1.6)$$

を考える. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\int_{\mathbb{R}} (\lambda^{\sqrt{n}}(x) - |x|) dx = 2$  が成り立っている.  $\mathbb{D}$  の中で  $n \rightarrow \infty$  の極限が議論できるが,  $\mathbb{R}$  上の測度にうめ込むことによってさらに極限移行の自由度が増す (後の (3.2) に現れる Kerov の推移測度や Rayleigh 測度等).

### 1.3 Plancherel 集団における極限形状

連続図形の例として

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}), & |x| \leq 2 \\ |x|, & |x| > 2 \end{cases} \quad (1.7)$$

を挙げる.

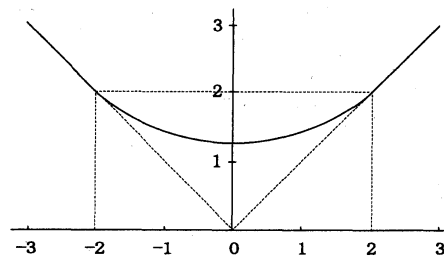


図 4 極限形状  $\Omega$

Plancherel 集団における大数の法則として, この極限形状  $\Omega$  がとらえられる.

**定理 1.2 (Logan–Shepp[9], Vershik–Kerov[12])** Plancherel 集団において, 次の大数の弱および強法則が成り立つ.

(1) 任意の  $\epsilon > 0$  に対し,

$$\mathfrak{P}^{(n)}(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.8)$$

(2)  $\mathfrak{P}$  に関してほとんどすべての経路  $t = (t(0) \nearrow t(1) \nearrow t(2) \nearrow \dots) \in \mathfrak{T}$  に対し,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |t(n)^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.9)$$

このような大数の法則 (測度の集中現象) の背後には Plancherel 測度のエルゴード性がある (次節参照).

対称群の既約表現の次元を与えるフック公式から

$$\mathfrak{p}^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} = \frac{n!}{(\prod_{b \in \lambda} h_\lambda(b))^2}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n$$

となるので, 極限形状を変分問題としてとらえることができる. つまり,

$$\log\left(\prod_{b \in \lambda} h_\lambda(b)\right) = \sum_{b \in \lambda} \log h_\lambda(b)$$

を最小にする問題の連続版として,  $\iint_{D_f} dx dy = 1$  という条件のもとに

$$\iint_{D_f} \log(f(x) - y + f^{-1}(y) - x) dx dy$$

を最小化することを考える. ただし, 図 5 の右図にあるのが関数  $f$  のグラフであり, それと  $x$  軸,  $y$  軸が囲む領域が  $D_f$  である.

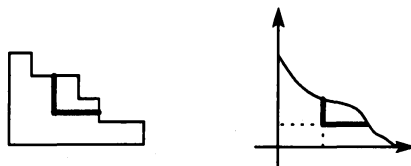


図 5 箱  $b$  におけるフックとその連続版

実際, この変分問題の解として  $\Omega$  が得られるが, 最初から巨視的な定式化をしているところは不満が残る.  $\Omega$  の導出のために, 実質的にはフック公式に基づく大偏差評価を行うことになり, それはまた独立したおもしろさがある.

## 2 Young グラフの経路空間上のエルゴード的測度

### 2.1 無限対称群の指標とエルゴード的測度

文字  $n+1$  を固定する自然なうめ込みのもとで  $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+1}$  とみなし, 無限対称群  $\mathfrak{S}_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathfrak{S}_n$  を考える.  $\mathfrak{S}_\infty$  上の関数空間として,

$$\mathcal{K}(\mathfrak{S}_\infty) = \{f : \mathfrak{S}_\infty \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{正定値, 中心的 (=類関数), } f(e) = 1\} \quad (2.1)$$

とおく.  $\mathbb{Y}$  上の関数  $\varphi$  の調和性を

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\mu: \lambda \nearrow \mu} \varphi(\mu), \quad \lambda \in \mathbb{Y}$$

によって定義し,

$$\mathcal{H}(\mathbb{Y}) = \{\varphi \rightarrow [0, \infty) \mid \text{調和}, \varphi(\emptyset) = 1\} \quad (2.2)$$

とおく. さらに,

$$\mathcal{M}(\mathfrak{T}) = \{\mathfrak{T} \text{ 上の中心的な確率測度}\} \quad (2.3)$$

とおく. ここで,  $\mathfrak{T}$  上の確率測度  $M$  が中心적であるとは,  $\emptyset$  から始まる有限経路が定める筒集合の測度の値が経路の終点のみに依存することである. (2.1) – (2.3) はすべてコンパクト凸集合である. ただし, (2.1), (2.2) には各点収束から定まる位相を入れ, (2.3) には確率測度の弱収束の位相を入れる ( $\mathfrak{T}$  は自然にコンパクト).

**命題 2.1** (2.1) – (2.3) は凸集合として位相同型である:  $\mathcal{K}(\mathfrak{S}_\infty) \cong \mathcal{H}(\mathbb{Y}) \cong \mathcal{M}(\mathfrak{T})$ .

(2.2) と (2.3) の同型は見やすい. (2.1) と (2.2) の同型は各層  $\mathfrak{S}_n$  での Fourier 展開で与えられる.  $\mathcal{M}(\mathfrak{T})$  の端点はエルゴード的と言われる.  $\mathcal{K}(\mathfrak{S}_\infty)$  の端点は  $\mathfrak{S}_\infty$  の指標と呼ばれる. また,  $\mathcal{H}(\mathbb{Y})$  の端点は Young グラフの (極小) Martin 境界と同一視される.

**例 2.2** Plancherel 測度  $\mathfrak{P} \in \mathcal{M}(\mathfrak{T}) \leftrightarrow$  非負調和関数  $\varphi(\lambda) = \dim \lambda / |\lambda|! \in \mathcal{H}(\mathbb{Y}) \leftrightarrow$  デルタ関数  $\delta_e \in \mathcal{K}(\mathfrak{S}_\infty)$ . これらは端点である.

**注意 2.3** 測度のエルゴード性について. 群  $G$  が可測に作用する空間  $X$  上の  $\sigma$ -有限な  $G$ -不変測度  $\mu$  の  $G$ -エルゴード性は, 次の同値な条件で特徴づけられる.

(i)  $G$ -不変測度の中で端的.

(ii)  $\mu(E) > 0$  なる任意の集合  $E$  に対して,  $G$  の可算部分集合  $G_0$  が存在し,

$$\mu\left(\left(\bigcup_{g \in G_0} gE\right)^c\right) = 0$$

となる. つまり, “ $G$ -軌道がすべての点を通過する.”

(iii)  $X$  上の有界で  $G$ -不変な実数値関数は  $\mu$ -a.e. に定数である. つまり, “軌道平均とアンサンブル平均が一致.”

今の場合,  $X = \mathfrak{T}$  に作用する群  $G$  を次のようにとる.  $\lambda \in \mathbb{Y}$  に対し,

$$\mathfrak{S}(\lambda) = \{\emptyset \text{ から } \lambda \text{ に至る有限経路全体の上の置換}\}$$

とおく.  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  のとき,  $\sigma \in \mathfrak{S}(\lambda)$  が  $\mathfrak{T}$  に

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(t(0) \nearrow \cdots \nearrow t(n)) \nearrow t(n+1) \nearrow \cdots, & t(n) = \lambda \\ t, & t(n) \neq \lambda \end{cases}$$

によってはたらく. こうして  $\{\mathfrak{S}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{Y}\}$  によって生成される  $\mathfrak{T}$  の変換群を  $G$  とすると,  $\mathfrak{T}$  上の確率測度  $M$  に対し, 中心性と  $G$ -不変性が同値になる.



## 2.2 Thoma 集団

$\mathfrak{S}_\infty$  の指標の分類は, Thoma によって得られた.

定 理 2.4 (Thoma[11])  $\mathfrak{S}_\infty$  の指標の分類空間が

$$\Delta = \left\{ (\alpha, \beta) \mid \alpha = (\alpha_i)_{i=1}^\infty, \beta = (\beta_i)_{i=1}^\infty, \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0, \sum_{i=1}^\infty (\alpha_i + \beta_i) \leq 1 \right\} \quad (2.4)$$

で与えられる. このとき, Thoma パラメータ  $(\alpha, \beta) \in \Delta$  に対応する指標を  $f_{\alpha, \beta}$  とすると,

$$f_{\alpha, \beta}(k\text{-cycle}) = \sum_{i=1}^\infty (\alpha_i^k + (-1)^{k-1} \beta_i^k), \quad k \geq 2 \quad (2.5)$$

が成り立つ. (2.5) は  $k=1$  では成り立つとは限らない. 特に,  $f_{0,0} = \delta_e$  である.

Vershik–Kerov は, Young 図形の漸近挙動による Thoma パラメータの特徴づけを与えた.

定 理 2.5 (Vershik–Kerov[13]) Thoma パラメータ  $(\alpha, \beta) \in \Delta$  に対し, 定理 2.4 と命題 2.1 を通して対応する  $f_{\alpha, \beta} \in \mathcal{K}(\mathfrak{S}_\infty)$  と  $M_{\alpha, \beta} \in \mathcal{M}(\mathfrak{T})$  をとる. このとき,  $M_{\alpha, \beta}$  に関してほとんどすべての経路  $t \in \mathfrak{T}$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n)_i}{n} = \alpha_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n)'_i}{n} = \beta_i \quad (2.6)$$

が成り立つ. ただし,  $t(n)_i$  は  $t(n) \in \mathbb{Y}_n$  の第  $i$  行の長さ,  $'$  は Young 図形の転置を表す.

Vershik–Kerov による定理 2.5 からわかるように, Plancherel 測度以外の  $M_{\alpha, \beta}$  で見た場合, サイズ  $n$  の Young 図形の行や列の典型的な長さが  $n$  のオーダーである. したがって, 非常に薄っぺらく退化してしまつて極限の形状は見えなくなる. そこで, 定理 1.2 のように面積が残るスケール極限, すなわち行や列の典型的な長さが  $\sqrt{n}$  のオーダーになるようにするため,

$$n\alpha_1^{(n)} \asymp \sqrt{n}, \quad n\beta_1^{(n)} \asymp \sqrt{n} \quad (2.7)$$

とする.  $M_{\alpha, \beta} \in \mathcal{P}(\mathfrak{T})$  の周辺分布  $M_{\alpha, \beta}^{(n)} \in \mathcal{P}(\mathbb{Y}_n)$  を

$$M_{\alpha, \beta}^{(n)}(\lambda) = M_{\alpha, \beta}(\{t \in \mathfrak{T} \mid t(n) = \lambda\}), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n$$

によって定める.

Thoma パラメータの列  $\{(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対し,  $\{(\mathbb{Y}_n, M_{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}}^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  を **Thoma 集団** と呼ぼう. Thoma 集団が (2.7) の条件をみたすとき, Plancherel 集団における極限形状のいろいろな変形が観察されることを見ていく.

Thoma パラメータ  $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ ,  $\beta = (\beta_i)_{i=1}^{\infty}$  に対し,

$$\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) \in [0, 1]$$

とおき,

$$\nu^{\alpha, \beta} = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \delta_{\alpha_i} + \beta_i \delta_{-\beta_i}) + \gamma \delta_0 \quad (2.8)$$

を **Thoma 測度**と呼ぶ.  $\nu^{\alpha, \beta}$  は  $\mathbb{R}$  上の確率測度であり,  $\text{supp } \nu^{\alpha, \beta} \subset [-1, 1]$  をみたす.  $h > 0$  に対して

$$(\nu^{\alpha, \beta})_h(dx) = \nu^{\alpha, \beta}(h^{-1}dx)$$

というスケール変換の記号を定める.

$\mathbb{R}$  上の確率測度  $\mu$  の  $n$  次モーメントと  $n$  次キュムラントをそれぞれ  $M_n(\mu)$ ,  $\kappa_n(\mu)$  で表す. キュムラントは測度の合成積  $*$  を線型化する:

$$\kappa_n(\mu * \nu) = \kappa_n(\mu) + \kappa_n(\nu), \quad \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

文字の集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  の分割全体  $P(n)$  に自然な半順序を入れる. つまり, 最大元が  $\{1, 2, \dots, n\}$  であり, 最小元が  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ . 確率測度のモーメントとキュムラントは,  $\pi \in P(n)$  に関しても乗法的に拡張して定義される:  $M_{\pi}(\mu)$ ,  $\kappa_{\pi}(\mu)$ . 半順序集合  $P(n)$  の構造を利用してモーメントとキュムラントを互いに他の多項式として表示するのが, よく知られたキュムラント-モーメント公式である. この文脈に従えば, 分割のなす半順序集合として  $P(n)$  全体ではなく非交差分割からなる  $NC(n)$  を考え, いわゆる自由キュムラント-モーメント公式を通して,  $\mathbb{R}$  上の確率測度  $\mu$  の  $n$  次自由キュムラント  $R_n(\mu)$  を定義することができる. この自由キュムラントの母関数

$$R_{\mu}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} R_{k+1}(\mu) \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad (2.9)$$

が, Voiculescu の  $R$ -変換である. 自由キュムラントによって線型化されるのが自由合成積田である:

$$R_n(\mu \boxplus \nu) = R_n(\mu) + R_n(\nu), \quad \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

確率測度  $\mu$  の (自由) 合成積に関する任意乗のべき根がとれるとき,  $\mu$  は無限分解可能といわれる:

$$\mu = (\mu^{*(1/n)})^{*n}, \quad \mu = (\mu^{\boxplus(1/n)})^{\boxplus n}.$$

次の結果は, 実質的に Biane[1] による.

定理 2.6 Thoma パラメータの列  $\{(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  が, (2.7) のように  $\alpha_1^{(n)}, \beta_1^{(n)} \lesssim 1/\sqrt{n}$  をみたすとする. Thoma 測度 (2.8) に  $\sqrt{n}$  のスケール変換を施したものが

$$(\nu^{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}})_{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu \quad \text{in } \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (2.10)$$

というふうに極限測度  $\nu$  をもつとする. この  $\nu$  と

$$R_\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta}{1 - \zeta x} \nu(dx), \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad (2.11)$$

で関係づけられる自由無限分解可能な  $\mathbb{R}$  上の確率測度  $\mu$  をとる\*<sup>1</sup> (特に,  $R_1(\mu) = 0$ ,  $R_2(\mu) = 1$ ).  $\mu$  を推移測度にもつ連続図形を  $\omega \in \mathbb{D}$  とする. このとき, 大数の弱法則

$$\forall \epsilon > 0, \quad M_{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}}^{(n)}(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^{\sqrt{n}}(x) - \omega(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.12)$$

が成り立つ.

例 2.7 Plancherel 集団においては, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $(\nu^{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}})_{\sqrt{n}} = \delta_0$  であるから,

$$\nu = \delta_0 \iff R_\mu(\zeta) = \zeta \iff \mu: \text{標準半円分布} \iff \omega = \Omega \text{ (極限形状)}.$$

例 2.8 (Biane[1])  $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$  における典型的なテンソルの型を議論する.  $\alpha_i = 1/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\alpha_i = 0$  ( $i = N, N+1, \dots$ ),  $\beta_i \equiv 0$  なる Thoma パラメータを考える. 自然数  $N$  と  $n$  が  $t > 0$  に対して

$$N = t\sqrt{n}$$

と関係づけられるとする. このとき, 定理 2.6 において

$$\begin{aligned} \nu &= \delta_{1/t}, \\ R_k(\mu) &= 1/t^{k-2} \quad (k \geq 2), \quad R_1(\mu) = 0, \\ \text{supp } \mu &= \begin{cases} [(1/t) - 2, (1/t) + 2], & t \geq 1 \\ \{-t\} \cup [(1/t) - 2, (1/t) + 2], & 0 < t < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に  $t = 1$  のとき,  $\mu$  の 2 次以上の自由キュムラントがすべて 1 になって,  $\mu$  は自由 Poisson 分布である.

例 2.9 例 2.8 の拡張である. 今度は,  $\alpha_i = a/N$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\alpha_i = 0$  ( $i = N, N+1, \dots$ ),  $\beta_i = b/N'$  ( $i = 1, \dots, N'$ ),  $\beta_i = 0$  ( $i = N', N'+1, \dots$ ),  $a, b \geq 0$ ,  $a + b = 1$  なる Thoma パラメータを考える. 自然数  $N, N', n$  が

$$N = t\sqrt{n}, \quad N' = u\sqrt{n}, \quad t, u > 0$$

\*<sup>1</sup> (2.11) は Lévy-Khintchine 公式の自由版とみなせる.

と関係づけられるとする。このとき、定理 2.6 において

$$\nu = a\delta_{a/t} + b\delta_{-b/u},$$

$$R_k(\mu) = \frac{a^{k-1}}{t^{k-2}} + (-1)^{k-2} \frac{b^{k-1}}{u^{k-2}} \quad (k \geq 2), \quad R_1(\mu) = 0$$

が成り立つ。  $t = u$  の場合、  $\text{supp}\mu = [-K, K]$ :

$$K = \frac{\sqrt{|4t^2 - 1|}(t\sqrt{t^2 + 2} + 1 - t^2)}{2t\sqrt{|2t\sqrt{t^2 + 2} - 2t^2 - 1|}}$$

となる。特に  $t = u = 1/2$  のときは、(de l'Hôpital の法則とも合致して)  $K = 3\sqrt{3}/2$  である。

**例 2.10** Plancherel 集団の一種の  $q$ -類似を議論する。該当する Thoma パラメータは、 $0 < q \leq 1$  として  $\alpha_i = (1 - q)q^{i-1}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ),  $\beta_i \equiv 0$  である。 $q$  と  $n$  が

$$1 - q = r/\sqrt{n}, \quad 0 < r < \infty$$

と関係づけられるとする。このとき、定理 2.6 において

$$\nu(dx) = r^{-1}I_{[0,r]}(x)dx,$$

$$R_k(\mu) = \frac{r^{k-2}}{k-1} \quad (k \geq 2), \quad R_1(\mu) = 0,$$

$$\text{supp}\mu = [K_1, K_2]:$$

$$K_1 = -\frac{\sqrt{r^2 + 4} + r}{2} - \frac{1}{r} \log \frac{r^2 + 2 + r\sqrt{r^2 + 4}}{2},$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{r^2 + 4} + r}{2} - \frac{1}{r} \log \frac{r^2 + 2 - r\sqrt{r^2 + 4}}{2}$$

が成り立つ。なお、この  $q$ -Plancherel 集団と Hecke 代数とのかかわりについては、[10], [4] を参照。

**例 2.11** 例 2.10 の拡張である。Thoma パラメータとして  $\alpha_i = a(1 - q)q^{i-1}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ),  $\beta_i = b(1 - q')q'^{i-1}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ),  $a, b \geq 0$ ,  $a + b = 1$  を考え、

$$1 - q = r/\sqrt{n}, \quad 1 - q' = s/\sqrt{n}, \quad r, s > 0$$

とする。このとき、定理 2.6 において

$$\nu(dx) = \left( \frac{1}{r} I_{[0,ar]}(x) + \frac{1}{s} I_{[-bs,0]}(x) \right) dx,$$

$$R_k(\mu) = \frac{a^{k-1}r^{k-2} + b^{k-1}(-s)^{k-2}}{k-1} \quad (k \geq 2), \quad R_1(\mu) = 0$$

が成り立つ。

$G_\infty$  の指標  $f_{\alpha,\beta}$  が超対称べき和 (2.5) で与えられるので, 対応する調和関数  $\varphi_{\alpha,\beta}$  や中心測度  $M_{\alpha,\beta}$  は超対称な Schur 関数  $s_\lambda(\alpha, \beta)$  を用いて表示される. 上述の例たちは, 本質的には超対称 Schur 関数のパラメータに離散的な確率分布を代入したものである.  $\alpha, \beta$  には成分の単調性が課されているが, (超) 対称関数なので順序の入れ換えは値に影響しない.

### 3 証明の概略

おおよそ次のような方針によって定理 1.2 や定理 2.6 を証明することができる.

- 経路空間上の中心的な確率測度に関するさまざまな積分 (期待値) が, 指標を通して計算される.
- Young 図形の形状は, その推移測度の自由キウムラントを通して読み取ることができる.
- 対称群の既約指標の値と推移測度の自由キウムラントとは, Kerov 多項式を通して結びついている.

#### 3.1 Young 図形の推移測度

山谷座標  $(x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < y_{r-1} < x_r)$  をもつ矩形図形  $\lambda \in \mathbb{D}_0 (\subset \mathbb{Y})$  に対し,

$$G(z; \lambda) = \frac{(z - y_1) \cdots (z - y_{r-1})}{(z - x_1) \cdots (z - x_r)}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

とおく. (3.1) を Cauchy-Stieltjes 変換 (部分分数分解にほかならない) にもつ測度を考える:

$$G(z; \lambda) = G_{m_\lambda}(z; \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x} m_\lambda(dx). \quad (3.2)$$

$m_\lambda$  は,  $\{x_1, \dots, x_r\}$  を台にもつ確率測度になり,  $\lambda \in \mathbb{D}_0$  の推移測度と呼ばれる<sup>\*2</sup>. また,

$$\tau_\lambda = \sum_{j=1}^r \delta_{x_j} - \sum_{j=1}^{r-1} \delta_{y_j} \quad (3.3)$$

を  $\lambda \in \mathbb{D}_0$  の Rayleigh 測度と呼ぶ. 推移測度や Rayleigh 測度の概念は, 極限操作によって矩形図形から連続図形に拡張される.

**例 3.1** 極限形状  $\Omega \iff$  推移測度  $m_\Omega$  : 標準半円分布  $\iff$  Rayleigh 測度  $\tau_\Omega$  : 標準逆正弦分布

---

<sup>\*2</sup> Kerov の名を冠すること多い.

### 3.2 Frobenius の指標公式

$\lambda \in \mathbb{Y}_n$  に対応する  $\mathfrak{S}_n$  の既約指標  $\chi^\lambda = \text{tr} \pi^\lambda$  がサイクル型  $\rho \in \mathbb{Y}_n$  の共役類に属する点  $x$  でとる値  $\chi^\lambda(x)$  を  $\chi_\rho^\lambda$  と記す. 自然数  $k$  に対し,  $\mathbb{Y}$  上の関数を

$$\Sigma_k(\lambda) = \begin{cases} n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{\chi_{(k, 1^{n-k})}^\lambda}{\dim \lambda}, & |\lambda| = n \geq k, \\ 0, & |\lambda| = n < k \end{cases} \quad (3.4)$$

によって定める. ここで,  $(k, 1^{n-k})$  は 1 個の  $k$ -行と  $n-k$  個の 1-行 (すなわち箱 1 つ) からなる Young 図形である.

$\lambda \in \mathbb{Y}$  の推移測度の Cauchy-Stieltjes 変換を用いれば,

$$\Sigma_k(\lambda) = -\frac{1}{k} [z^{-1}] \left\{ \frac{1}{G_{m_\lambda}(z) G_{m_\lambda}(z-1) \cdots G_{m_\lambda}(z-k+1)} \right\} \quad (3.5)$$

と表される. (3.5) も Frobenius の指標公式と呼ぼう.

### 3.3 Kerov 多項式

$\lambda \in \mathbb{D}_0$  の推移測度  $m_\lambda$  の自由キユムラントは, Cauchy-Stieltjes 変換のことばで

$$R_{k+1}(m_\lambda) = -\frac{1}{k} [z^{-1}] \left\{ \frac{1}{G_{m_\lambda}(z)^k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.6)$$

と表される. (3.5) と (3.6) を比較する議論により,

$$\Sigma_k(\lambda) = R_{k+1}(m_\lambda) + P_k(R_2(m_\lambda), \dots, R_{k-1}(m_\lambda)) \quad (3.7)$$

という関係式が得られる. ここで,  $P_k$  は重み次数が  $k$  以下の  $k-2$  変数多項式である. 重み次数とは,  $\mathbb{Y}$  上の (座標に関する) 多項式関数のなす **Kerov-Olshanski** 代数  $A$  に導入される 1 つの次数であり,  $R_k(m_\lambda)$  は重み次数  $k$  の多項式 ( $A$  の元) である.  $A$  には目的に応じた生成系がいろいろあり, (3.4) もその 1 つである. Kerov-Olshanski 代数の詳細については, [8], [6] を参照. (3.7) に現れた

$$x_{k+1} + P_k(x_2, \dots, x_{k-1}) \quad (3.8)$$

を **Kerov 多項式** と呼ぶ.  $x_j$  を  $j$  次と勘定すれば, (3.8) の各項の次数は,  $k+1, k-1, k-3, \dots$  のいずれかである. Kerov 多項式の係数が整数であることは導入後ほどなく知られたが, 実は自然数になるであろうと Kerov が予想し, この Kerov 予想は Féray[3] によって示された. Kerov 多項式については, [2] も参照. [2] にあるように, 上述の Kerov 多項式の導出は Okounkov による.

### 3.4 大数の法則の計算

まず, Plancherel 集団を考える. Young 図形  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  が大きくなるにつれて

$$\begin{aligned} (\text{ア}) \quad & \lambda \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Omega \quad \text{in } \mathbb{D}, \\ (\text{イ}) \quad & M_k(\mathfrak{m}_{\lambda \sqrt{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_k(\mathfrak{m}_\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ (\text{ウ}) \quad & R_k(\mathfrak{m}_{\lambda \sqrt{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_k(\mathfrak{m}_\Omega) = \begin{cases} 1, & k = 2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

となるが, 弱法則を示す程度であれば, これらはどれも直接そう困難なく示される. 本稿の趣旨に沿えば, (ウ) を計算することになる. 少し計算式を書くと次のようになる:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} R_k(\mathfrak{m}_{\lambda \sqrt{n}}) \mathfrak{P}^{(n)}(\lambda) \\ &= n^{-k/2} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} R_k(\mathfrak{m}_\lambda) \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \\ &\approx n^{-k/2} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \Sigma_{k-1}(\lambda) \frac{(\dim \lambda)^2}{n!} \\ &= n^{k/2-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \chi_{(k-1, 1^{n-k+1})}^\lambda \frac{\dim \lambda}{n!} \\ &= n^{k/2-1} \delta_e((k-1)\text{-cycle}) = \begin{cases} 1, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

途中, (3.7) を用いた. 強法則を示すには, もう少し立ち入った計算が要る. 特に, サイズ  $n$  の Young 図形の最長行・列の長さが  $\sqrt{n}$  のオーダーになること, (ア) の収束が一様収束であることは, 自由キウムラントの計算のみからは自明でない. [5] には完全な証明が載っている.

一般の Thoma 集団に対しても同様に, 推移測度の自由キウムラントの期待値を計算しようとする, と

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} R_k(\mathfrak{m}_{\lambda \sqrt{n}}) M_{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}}^{(n)}(\lambda) \\ &\approx n^{-k/2} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \Sigma_{k-1}(\lambda) (\dim \lambda) s_\lambda(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}) \\ &\approx n^{(k/2)-1} p_{k-1}(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}) \\ &= n^{(k-2)/2} \int_{\mathbb{R}} x^{k-2} \nu^{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}}(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^{k-2} (\nu^{\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}})_{\sqrt{n}}(dx) \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

のようになる. ただし,  $p_k(\alpha, \beta)$ ,  $s_\lambda(\alpha, \beta)$  はそれぞれ超対称なべき和と Schur 関数を表す. Thoma 測度のモーメントが自然に登場すること, さらに母関数を考えると (2.11) の形が見えることに注意する.

#### まとめ

- 対称群の表現の既約分解から生じる Young 図形の統計集団を扱う.
- Young 図形の極限形状の問題は, このような統計集団における大数の (弱または強) 法則として定式化される.
- そのような集中現象においては, 統計集団のエルゴード性が重要な役割を演じる.
- Plancherel 集団が最もよく知られた例である.
- 無限対称群の指標の観点から, Plancherel 集団の拡張として Thoma 集団が導入される. 具体的な計算例は, まだあまり多くはない.

#### 参考文献

- [1] P. Biane, Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups, *Internat. Math. Res. Notices* **2001**, 179–192.
- [2] P. Biane, Characters of symmetric groups and free cumulants, *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics (St. Petersburg 2001)*, 185–200, *Lecture Notes in Math.* **1815**, Springer, Berlin, 2003.
- [3] V. Féray, Combinatorial interpretation and positivity of Kerov’s character polynomials, *J. Alg. Combin.* **29** (2009), 473–507.
- [4] V. Féray, P.-L. Méliot, Asymptotics of  $q$ -Plancherel measures, *Probab. Theory Related Fields* **152** (2012), 589–624.
- [5] A. Hora, Lecture Note on introduction to asymptotic theory for representations and characters of symmetric groups (University of Wrocław), 2007, unpublished.
- [6] V. Ivanov, G. Olshanski, Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams, *Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives*, 93–151, *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.* **74**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [7] S. Kerov, Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis, *Translations of Mathematical Monographs* **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, xvi+201pp.
- [8] S. Kerov, G. Olshanski, Polynomial functions on the set of Young diagrams, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **319** (1994), 121–126.



- [9] B. F. Logan, L. A. Shepp, A variational problem for random Young tableaux, *Adv. Math.* **26** (1977), 206–222.
- [10] E. Strahov, A differential model for the deformation of the Plancherel growth process, *Adv. Math.* **217** (2008), 2625–2663.
- [11] E. Thoma, Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Math. Z.* **85** (1964), 40–61.
- [12] A. Vershik, S. Kerov, Asymptotic behavior of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **233** (1977), 1024–1027; English transl.: *Soviet Math. Dokl.* **233** (1977), 527–531.
- [13] A. Vershik, S. Kerov, Asymptotic theory of characters of the symmetric group, *Funkts. Anal. i Prilozhen.* **15** (1981), 15–27; English transl.: *Funct. Anal. Appl.* **15** (1982), 246–255.